Le déterminant de ces équations est le déterminant symétrique

$$\Delta^* = \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, \dots, c_n)} \tag{26}$$

Appelons $\Delta^*_{j,k}$ le déterminant obtenu en supprimant la j^e colonne et la k^e ligne de Δ^*. Nous avons immédiatement:

$$\frac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta^*_{k,j}}{\Delta^*}. \tag{27}$$

On obtient de même

$$\frac{\partial c_j}{\partial \gamma_k} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta^*_{j,k}}{\Delta^*}. \tag{28}$$

Mais Δ^* étant symètrique, on a

$$\Delta^*_{k,j} = \Delta^*_{j,k}. \tag{29}$$

Donc

$$\frac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_k}. \tag{30}$$

La dernière formule [**10**] est démontrée.

Nous avons

$$\frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c}{\partial \gamma_j}. \tag{31}$$

Par le formule [**27**]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{\Delta^*} \Bigg\{ & \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_1} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, \dots c_{j-1}, c_{j+1}, \dots c_n)} - \\ & - \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_2} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_3}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, c_n)} \end{aligned}\right. \tag{32}$$

$$[32]\quad \left\{ \begin{aligned} &+ \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial^2 X}{\partial a_k \, \partial c_n} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} \Bigg\} = \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_2}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_k, c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} \\ &\qquad = \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, a_k, c_{j+1}, \dots, c_n)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, les dérivées des c par rapport à a_k son données par les équations

$$[33]\quad \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial a_k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial a_k} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

On en tire

$$[34]\quad \frac{\partial c_j}{\partial a_k} = -\frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, a_k, c_{j+1}, \dots, c_n)}$$

Par la comparaison des formules [**32**] et [**34**]

$$[35]\quad \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = -\frac{\partial c_j}{\partial a_k}$$

on a ainsi la 2[de] formule [**10**].

Par le théorème de dérivation des fonctions composées

$$[36]\quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k} = \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \, \partial a_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c_\lambda}{\partial a_k}$$

La formule [**34**] s'écrit encore

$$[37]\quad \begin{aligned} \frac{\partial c_j}{\partial a_k} &= (-1)^j \cdot \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_k, c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} = \\ &= (-1)^j \cdot \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_{j-1}}, \frac{\partial X}{\partial c_{i+1}}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \quad \dots, \quad c_n)}. \end{aligned}$$