2.º *m negativo*. Tornando explicito o signal de m, teremos

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m}}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}$$

$$=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right),$$

e depois, tomando os limites,

$$\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}=e.$$

9. *Nova propriedade do limite da serie* (1) *do n.º 3, respectiva ao caso de ser z uma quantidade numerica, positiva ou negativa.*

Substituindo agora z por um numero qualquer x, e attendendo a que é

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^{x}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^{x},$$

ou, pondo $\frac{m}{x}=\mu$,

$$(1)\qquad \left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{x},$$

e finalmente considerando que, qualquer que seja o valor finito, positivo ou negativo, de x, ao valor infinito do inteiro positivo m corresponderá (*) $\mu=\pm\infty$, acharemos, tomando os limites dos

(*) As duas quantidades, aqui designadas por m e μ, tenderão simultaneamente para o infinito, passando a primeira por uma serie de valores inteiros e positivos, e percorrendo a segunda outra serie de valores, positivos ou negativos, inteiros, fraccionarios ou incommensuraveis.

dois membros de (1),

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x. \tag{2}$$

10. *Demonstração de Cauchy.* Embora seja muito simples a demonstração, ultimamente exposta, da propriedade expressa pela equação (2) do numero precedente, ainda aqui daremos d'essa propriedade outra demonstração, devida a Cauchy, e que nos parece tambem muito interessante.

Funda-se esta demonstração no seguinte:

Lemma. — *Designando* $[x]$ *uma determinada funcção contínua do numero* x, *se for*

$$[x][x'] = [x+x'], \tag{1}$$

teremos

$$[x] = [1]^x. \tag{2}$$

De (1) deduz-se

$$[y][y'][y''] \ldots [y^{(n-1)}] = [y+y'+y''+\ldots+y^{(n-1)}],$$

e depois, pondo $y = y' = y'' = \ldots = y^{(n-1)}$,

$$[y]^n = [ny]. \tag{3}$$

Posto isto, distinguiremos agora diversos casos.

1.° Pondo $y=1$ em (3), resulta

$$[1]^n = [n],$$

o que demonstra a relação (2) para valores inteiros de x.

2.° Suppondo $y = \frac{1}{n}$ em (3), vem

$$\left[\frac{1}{n}\right]^n = [1],$$

e logo

$$\left[\frac{1}{n}\right]=[1]^{\frac{1}{n}},$$

o que confirma a existencia da relação (2) para valores de x da forma $\frac{1}{n}$, sendo n inteiro.

3.º Fazendo $y=\frac{m}{n}$, a relação (3) dará

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n=[m],$$

ou

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n=[1]^m,$$

e logo

$$\left[\frac{m}{n}\right]=[1]^{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

4.º Assim demonstrada a relação (4) para quaesquer valores $\frac{m}{n}$, fraccionarios e positivos, se agora fizermos convergir $\frac{m}{n}$ para o limite zero, acharemos

$$[0]=1. \tag{5}$$

E com a applicação do mesmo methodo dos limites igualmente se acharia

$$[\nu]=[1]^\nu$$

sendo ν um numero incommensuravel qualquer.

5.º Resta demonstrar que a relação (2) tambem se verifica para valores negativos de x.

Para isso faremos em (1) $x' = -x$, o que dará

$$[x][-x] = [0]$$

ou

$$[x][-x] = 1,$$

e logo

$$[-x] = \frac{1}{[x]} = \frac{1}{[1]^x} = [1]^{-x}.$$

Suppondo agora que por $[x]$ se designava a funcção $\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, como para esta funcção se verifica (n.º 6) a propriedade expressa pela relação (1), teremos

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left\{\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^x$$

ou

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

III. Das potencias que têm por base o numero *e* e por expoente uma quantidade geometrica

11. *Definição e propriedades das exponenciaes.* Quer z seja um numero ou uma quantidade geometrica, sabemos (n.º 7) que é

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

e demais no primeiro caso tem-se tambem

$$(1) \qquad e^z = \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

Posto isto, e suppondo agora que é z uma quantidade geometrica, tomaremos para definição de e^z a que resulta das mesmas relações (1).

D'esta definição e do que se demonstrou em o n.º 6 resulta

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

e conseguintemente

$$e^z : e^{z'} = e^{z-z'},$$

sendo z e z' duas quantidades geometricas quaesquer.

12. *Exponencial trigonometrica.* Suppondo $z = yi$, sendo y um numero qualquer, positivo ou negativo, procuremos o valor ou expressão de e^{yi}.

Tem-se por definição

$$e^{yi} = \lim \left(1 + \frac{yi}{m}\right)^m,$$

ou, pondo (*)

(1) $$1 + \frac{yi}{m} = \rho_\theta,$$

(2) $$e^{yi} = \lim. (\rho^m)_{m\theta},$$

sendo ρ e θ duas quantidades variaveis com o inteiro m.

A relação (1) equivale a

$$1 + \frac{yi}{m} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta);$$

(*) Designamos por θ o menor valor numerico, positivo ou negativo, do argumento concernente á grandeza geometrica ρ_θ.